Teoria dos Conjuntos

A concepção de conjuntos nem precisa ser dita, o próprio nome já diz tudo. Ex. Pega um grupo de cadeiras e junta sobre um círculo feito no chão.

Pronto, temos um conjunto de cadeiras.

Um conjunto é frequentemente definido através de uma propriedade que caracteriza seus elementos. Mais precisamente, parte-se de uma propriedade P. Ela define um conjunto X, assim: se um objeto x goza da propriedade P, então $x \in X$; se x não goza de P então $x \notin X$. Escreve-se:

$$X = \{x \mid x \text{ goza da propriedade } P\}.$$

Lê-se: "X é o conjunto dos elementos x tal que x goza da propriedade P". No caso particular em que a propriedade P se refere a elementos de um conjunto fundamental E, indicaremos X por:

$$X = \{x \in E \mid x \text{ goza da propriedade } P\}.$$

Caso ocorra de nenhum elemento de E gozar da propriedade P, diremos que o conjunto {x ∈ E | x goza de P} não possui elemento algum e o denominaremos de **Conjunto Vazio**. Para representá-lo, usaremos o símbolo ∅.

Conjuntos numéricos podem ser representados de diversas formas. A forma mais simples é dar um nome ao conjunto e expor todos os seus elementos, um ao lado do outro, entre os sinais de chaves. Veja o exemplo: $A = \{51, 27, -3\}$

Esse conjunto se chama "A" e possui três termos, que estão listados entre chaves.

Os nomes dos conjuntos são sempre letras maiúsculas. Quando criamos um conjunto, podemos utilizar qualquer letra.

1 Conjuntos Numéricos

Para trabalharmos com números, devemos primeiramente ter um conhecimento básico de quais são os conjuntos ("tipos") de números existentes atualmente.

A noção de número tem provavelmente a idade do homem e certamente sempre esteve ligada à sua necessidade de registrar e interpretar os fenômenos que o cercavam.

Os primeiros símbolos numéricos conhecidos surgiram com o intuito de representar a variação numérica em conjuntos com poucos elementos. Com a ampliação e a diversificação de suas atividades, o homem sentiu a necessidade de criar novos símbolos numéricos e processos de contagem e desenvolver sistemas de numeração.

A maioria dos sistemas de numeração tinha como base os números 5 ou 10, numa clara referencia ao numero de dedos que temos nas mãos. Esses sistemas ainda não possuíam a notação posicional nem o número zero.

Os primeiros registros da utilização da notação posicional ocorreram na Babilônia, por volta de 2500 $a.C.$ Já o aparecimento do zero data do século IX e é atribuído aos hindus.

Também se atribuiu aos hindus o atual sistema de numeração posicional decimal, que foi introduzido e difundido na Europa pelos árabes. Por essa razão, esse sistema é costumeiramente chamado de sistema de numeração indo-arábico.

Deve-se a Leonardo de Pisa (1175-1240), também chamado Fibonacci, a difusão do sistema indo-arábico na Europa, através de sua obra Líber Abacci, de 1202.

1.1 Números Naturais

Vamos começar nos primórdios da matemática.

- Se eu pedisse para você contar até 10, o que você me diria?

- Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove e dez.

Pois é, estes números que saem *naturalmente* de sua boca quando solicitado, são chamados de números NATURAIS, o qual é representado pela letra N .

Foi o primeiro conjunto inventado pelos homens, e tinha como intenção mostrar quantidades.

Obs.: Originalmente, o zero não estava incluído neste conjunto, mas pela necessidade de representar uma quantia nula, definiu-se este número como sendo pertencente ao conjunto dos Naturais. Portanto:

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$$

Como o zero originou-se depois dos outros números e possui algumas propriedades próprias, algumas vezes teremos a necessidade de representar o conjunto dos números naturais sem incluir o zero. Para isso foi definido que o símbolo * (asterisco) empregado ao lado do símbolo do conjunto, que representa a ausência do zero. Veja o exemplo:

$$N^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$$

1.2 Números Inteiros

Os números naturais foram suficientes para a sociedade durante algum tempo. Com o passar dos anos, e o aumento das "trocas" de mercadorias entre os homens, foi necessário criar uma representação numérica para as dívidas.

Com isso inventaram-se os chamados "números negativos", e junto com estes números, um novo conjunto: o conjunto dos números inteiros, representado pela letra Z.

$$Z = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

O conjunto dos números inteiros é formado por todos os números NATURAIS mais todos os seus representantes negativos.

Note que este conjunto não possui início nem fim (ao contrário dos naturais, que possui um início e não possui fim).

Assim como no conjunto dos naturais, podemos representar todos os inteiros sem o ZERO com a mesma notação usada para os NATURAIS.

$$Z^* = \{..., -2, -1, 1, 2, ...\}$$

Em algumas situações, teremos a necessidade de representar o conjunto dos números inteiros que NÃO SÃO NEGATIVOS.

Para isso emprega-se o sinal "+" ao lado do símbolo do conjunto (vale a pena lembrar que esta simbologia representa os números NÃO NEGATIVOS, e não os números POSITIVOS, como muita gente diz). Veja o exemplo:

$$Z_+ = \{0,1,2,3,4,5,...\}$$

Obs.: Note que agora sim este conjunto possui um início. E você pode estar pensando "*mas o zero não é positivo*". O zero não é positivo nem negativo, zero é NULO.

Ele está contido neste conjunto, pois a simbologia do sinalzinho positivo representa todos os números *NÃO NEGATIVOS*, e o zero se enquadra nisto.

Se quisermos representar somente os positivos (ou seja, os não negativos sem o zero), escrevemos:

$$Z_+^* = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Pois assim teremos apenas os positivos, já que o zero não é positivo. Ou também podemos representar somente os inteiros NÃO POSITIVOS com:

$$Z_- = \{..., -4, -3, -2, -1, 0\}$$

Obs.: Este conjunto possui final, mas não possui início. E também os inteiros negativos (ou seja, os não positivos sem o zero):

$Z_{-}^{*} = \{..., -4, -3, -2, -1\}$

Uma propriedade interessante dos números inteiros, que já foi mencionada neste texto (e que podemos representar em um gráfico) é a de ter em seu interior todos os números naturais. Veja o gráfico a seguir:

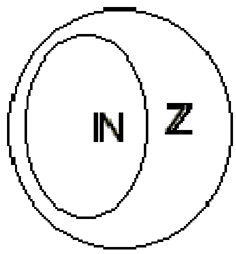


Figura 1 – N está contido em Z.

Todo número natural é inteiro, isto é, N é um subconjunto de Z

1.2.1 Operações com Números Inteiros

I) Adição e Subtração
I.a) Sinais iguais: Soma-se e conserva-se o mesmo sinal.
I.b) Sinais diferentes: Diminui-se e dá-se o sinal do maior.

II) Multiplicação e Divisão:

Aplica-se a regra dos sinais: $\begin{cases} + \ + = + \\ - \ + = - \\ + \ - = - \\ - \ - = + \end{cases}$

Obs.: Pela ordem, resolver $(\ )$; $[\ ]$; $\{\ \}$.

1.2.1.1 Exemplo:

$-3 \cdot \{14 \div (-7) - 3 \cdot [4 - (10 - 12 + 9 - 7 - 4) \div 2]\}$

$-3 \cdot \{-2 - 3 \cdot [4 - (-4) \div 2]\}$

$-3 \cdot \{-2 - 3 \cdot [4 + 2]\}$

$-3.\{-2 - 3 \cdot [+6]\}$

$-3.\{-2 - 18\}$

$-3.\{-20\}$

$+6$

1.3 Números Racionais

Olhando ainda pela linha do tempo, em um determinado momento começou a ficar crucial a necessidade de se representar "partes" de alguma coisa. Ex.: fatia de um bolo, pedaço de um terreno,... e por essa necessidade foi inventado as frações. Para incluir os números ditos fracionários, junto com os já existentes, criou-se o conjunto dos números RACIONAIS ($\mathbb{Q}$), que indica uma razão (divisão) entre dois números inteiros.

Os números racionais são todos aqueles que podem ser representados por uma fração de números inteiros.

Mas os números 6 e o 2,3 não têm o sinal de fração e são números racionais?

- Ora, o 6 pode ser representado pela fração $\frac{12}{2}$ ou até mesmo $\frac{6}{1}$, e o 2,3 pode ser $\frac{23}{10}$, portanto, se um número tem a possibilidade de ser escrito em fração de números inteiros, é considerado racional.

Então me parece que todos os números com vírgula serão racionais??

- Não. Somente os que possuírem *finitos* algarismos após a vírgula, e as chamadas dízimas periódicas, que possuem infinitos algarismos após a vírgula mas são números racionais. Veja os exemplos a seguir.

3,14159265...	Este não é um número Racional, pois possui infinitos algarismos após a vírgula (representados pelas reticências)
2,252	Este é um número Racional, pois possui finitos algarismos após a vírgula.
2,252525...	Este número possui infinitos números após a vírgula, mas é racional, é chamado de dízima periódica. Reconhecemos um número destes quando, após a vírgula, ele sempre repetir um número (no caso 25).

Com isso podemos concluir que o conjunto dos números RACIONAIS é formado por todos os números Inteiros (como vimos no exemplo anterior, um inteiro pode ser representado como uma fração, por exemplo, 10 pode ser $\frac{10}{1}$) e mais alguns.

Portanto, o conjunto dos inteiros está "dentro" do conjunto dos Racionais. Representamos assim:

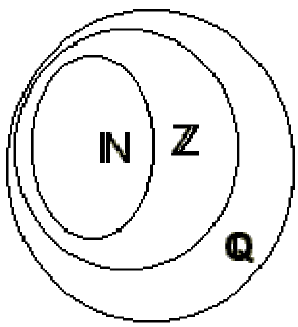


Figura 2 - Z está contido em Q.

Os números racionais são aqueles que podem ser expressos na forma a/b, onde a e b são inteiros quaisquer, com b diferente de 0.

Q = { a/b com a e b pertencentes a Z com b diferente de 0 }

Assim como exemplo podemos citar o –1/2 , 1 , 2,5 ,...

-Números decimais exatos são racionais. Pois:
0,1 = 1/10
2,3 = 23/10

- Números decimais periódicos são racionais.

0,1111... = 1/9
0,3232 ...= 32/99
2,3333 ...= 21/9
0,2111 ...= 19/90

-Toda dízima periódica 0,9999 ... 9 ... é uma outra representação do número 1.

Observe que o número racional 0,323232.... pode ser escrito como x; onde:
100x = 32,3232....; isto é: 100x = 32 + 0,3232... = 32 + x. Implicando em dizer que 100x – x = 32; logo x = 32/99.

Obs.: As notações para os "não positivos" e os "não negativos", utilizados para os inteiros, também podem ser usadas para os racionais. O zero é um número racional, pois podemos representá-lo pela fração: $\frac{0}{2} = 0$

$\mathbb{Q}^*$ = {Todos os racionais sem o zero}
$\mathbb{Q}_+$ = {Todos os racionais NÃO NEGATIVOS}
$\mathbb{Q}^*_+$ = {Todos os racionais NÃO NEGATIVOS sem o zero, ou seja, os positivos}
$\mathbb{Q}_-$ = {Todos os racionais NÃO POSITIVOS}
$\mathbb{Q}^*_-$ = {Todos os racionais NÃO POSITIVOS sem o zero, ou seja, os negativos}

1.4 Números Irracionais

Se formos um pouco mais além na história, vamos chegar ao famoso teorema de Pitágoras.

Pense comigo: Se temos um triângulo com catetos medindo 1 unidade de comprimento.

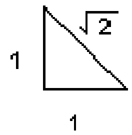


Figura 3 – Triângulo retângulo de hipotenusa igual a $\sqrt{2}$.

Pelo teorema de Pitágoras, calculamos que o terceiro lado (a hipotenusa), vale $\sqrt{2}$.

- E quanto é $\sqrt{2}$?

- Pois isto não podemos dizer exatamente. O que se sabe é que não dá para representar como uma fração de números inteiros, pois tem infinitas casas depois da vírgula (e não é uma dízima periódica). Então não podemos chamá-lo de número racional. Por este motivo houve a necessidade de criar-se mais um conjunto. Que, por oposição aos números racionais, chama-se "CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS". Formado por todos os números que, ao contrário dos racionais, **NÃO podem** ser representados por uma fração de números inteiros. Este conjunto é representado por $\mathbb{I}$.

O conjunto dos números irracionais são aqueles que não podem ser expressos na forma a/b, com a e b inteiros e b diferente de 0. São compostos por dízimas infinitas não periódicas.

Por exemplo:

$$\begin{aligned} \pi &= 3,1415926535\ldots \\ \sqrt{2} &= 1,414213562\ldots \\ \sqrt{3} &= 1,7320508\ldots \\ e &= 2,718281827\ldots \end{aligned}$$

Obs.: Note que as dízimas periódicas são números racionais, enquanto as dízimas não periódicas são números irracionais.

Por exemplo:
$\sqrt{23}; \sqrt{21}; \sqrt{111}$=> Todos estes valores não podem ser representados por uma fração de números inteiros, portanto, são chamados de números irracionais.

$(2+\sqrt{3})$=> Este número também não tem uma representação em forma de fração, por isso também é um número irracional. Ou seja, se somarmos um racional com um irracional teremos como resultado um irracional.

$\left(\frac{1}{6}+3\sqrt{5}\right)$=> Este também é irracional, pelo mesmo motivo do número acima.

- Todas as raízes não exatas fazem parte do conjunto dos números irracionais. Mas não são só elas, também estão neste conjunto o número pi (π=3,141592...), o número de Euler (e = 2,71828...), e alguns outros.

Portanto, se um número for racional, não pode ser irracional, e vice-versa. Por isso que, ao representarmos nos balões, devemos separá-los. Veja a figura a seguir:

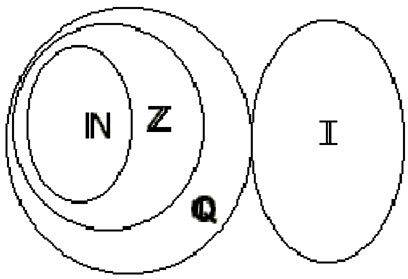


Figura 4 – Conjuntos Q e I.

1.5 Números Reais

Os números racionais e irracionais foram utilizados por séculos e até hoje são considerados os mais importantes. Por este motivo, foi dado um nome para o conjunto formado por todos estes conjuntos. O nome escolhido foi "CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS" que é a reunião do conjunto dos números irracionais com o dos racionais.

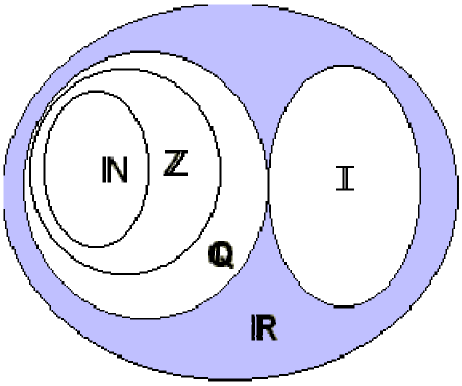


Figura 5 - $N \subset Z \subset Q \subset R$

Se um número é Real, ou ele será Racional ou ele será Irracional, e se encontrará no seu respectivo conjunto. Não existindo nenhum número que seja REAL e não seja ou RACIONAL ou IRRACIONAL.

1.5.1 Representação de um intervalo na reta real

Um intervalo é representado na reta real utilizando-se de uma pequena "bolinha vazia" para indicar que um dos pontos extremos não pertence ao intervalo e de uma "bolinha cheia" para indicar que o ponto extremo pertence.

Figura 6 – Representação de um intervalo na reta real.

1.5.2 Tipos de Intervalos:

Dados a e b números reais, com a ≤ b, x pertencente ao intervalo e c o seu comprimento, podemos classificar os intervalos como:

a) **Intervalo Fechado de comprimento finito c = b - a**:

$$[a,b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$$

b) **Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita de comprimento finito c = b - a**:

$$[a,b[= [a,b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$$

c) **Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita de comprimento finito c = b - a**:

$$(a,b] =]a,b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$$

d) **Intervalo aberto de comprimento finito c = b - a**:

$$]a,b[= (a,b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$$

e) **Intervalo aberto à direita de comprimento infinito**:

$$]-\infty,b[= (-\infty,b) = \{x \in R \mid x < b\}$$

f) **Intervalo fechado à direita de comprimento infinito**:

$$]-\infty,b] = (-\infty,b] = \{x \in R \mid x \leq b\}$$

g) **Intervalo fechado à esquerda de comprimento infinito**:

$$[a,+\infty) = [a,+\infty[= \{x \in R \mid a \leq x\} \text{ ou } [a,+\infty) = [a,+\infty[= \{x \in R \mid x \geq a\}$$

h) **Intervalo aberto à esquerda de comprimento infinito**:

$$]a,+\infty[= (a,+\infty) = \{x \in R \mid x > a\}$$

i) **Intervalo aberto de comprimento infinito**:

$$]-\infty,+\infty[= (-\infty,+\infty) = R$$

j) **Intervalo fechado de comprimento nulo**:

Como o comprimento é nulo e o intervalo fechado, então a = b e esse intervalo corresponde ao conjunto unitário {a}, isto é, a um ponto da reta real.

Concluo a classificação dos intervalos com a seguinte pergunta para vocês: E o intervalo vazio como seria definido?

1.5.3 União e Intersecção de Intervalos

Como intervalos são conjuntos é natural que as operações mencionadas possam ser realizadas. E, trata-se de um procedimento muito comum na resolução de alguns problemas.

E a maneira mais fácil e intuitiva de realizar essas operações é através da representação gráfica dos intervalos envolvidos. Vamos à um exemplo prático de como efetuar tais operações.

Sejam $A = [-1,6] = \{x \in R \mid -1 \leq x \leq 6\}$ e $B = (1,+\infty) = \{x \in R \mid x > 1\}$ dois intervalos e vamos determinar $A \cup B$ e $A \cap B$.

Primeiramente, marcamos todos os pontos que são extremos ou origens dos intervalos em uma mesma reta. Em seguida, abaixo dessa reta, traçamos os intervalos que representam graficamente os conjuntos A e B. E, por fim, é só utilizar a definição de união e intersecção para determinar os trechos que estão em pelo menos um intervalo e os trechos comuns aos dois intervalos, respectivamente. Veja a solução de $A \cap B$ na figura a seguir e de onde é também facilmente observado o resultado de $A \cup B$:

$$A \cap B = \{x \in R \mid 1 < x \leq 6\} \text{ e } A \cup B = \{x \in R \mid -1 \leq x\}$$

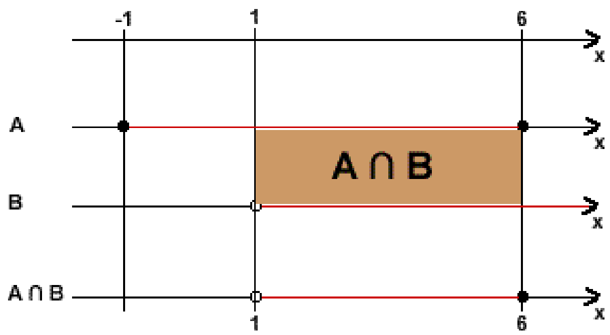


Figura 7 – Intersecção de intervalos.

1.6 Números Complexos

Durante muito tempo foi só isso que precisamos, conseguíamos fazer todos os cálculos necessários com apenas estes números. Mas o tempo foi passando e novas necessidades foram surgindo, veja a história a seguir.

Com um grande salto no tempo, chegamos na casa de nosso querido amigo Caju!

Estava ele brincando com números em sua casa, quando houve o seguinte diálogo...

Caju - Mãe, mãe. Olha só que legal, eu sei que $\sqrt{25}$ é 5, porque 5 ao quadrado é 25.

Mãe - Oh! Meu filhão, muito bem!

Caju - Também sei que $\sqrt{81}$ é 9, pois 9 ao quadrado é 81.
Mãe - Ah, filhinho, que bonitinho! Mas me diz uma coisa, quanto é $\sqrt{-25}$?
Caju - Ora mãe, isso é fácil, $\sqrt{-25}$ é –5 !
Mãe - Então me prova.
Caju - Olha mãe, (–5) ao quadrado dá... dá...... ops, dá +25...

Pois é, *qualquer número negativo elevado ao quadrado resulta um valor positivo, então como fazer para calcular a raiz quadrada de um número negativo*?

A partir daí firmou-se um mistério na Matemática: quanto vale esta raiz?

O tempo passou, e para solucionar o caso, convencionou-se que $\sqrt{-1} = i$, onde i é chamado de unidade imaginária.
Ex.: $\sqrt{-81} = \sqrt{81 \cdot (-1)} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{-1} = 9 \cdot i$

Aqui foram usadas as propriedades de radiciação.

E com isso formou-se o conjunto dos números IMAGINÁRIOS, representado pela letra i, que é composto por todas as raízes de números negativas.
Novamente temos uma divisão, ou o número é Real ou não é Real. Por isso devemos colocar o balão dos imaginários separado dos números Reais. Veja o desenho:

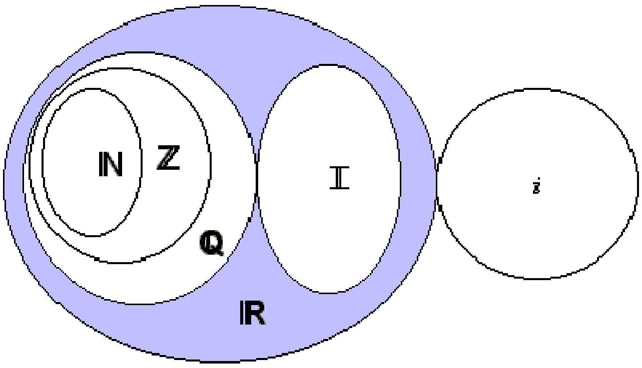


Figura 8 – Conjunto dos complexos.

Agora, neste caso temos uma dúvida. Se somarmos um número Real com um número imaginário, como por exemplo:
2+3i

Em que balão ele vai se encontrar?
- Não pode ser real, e também não pode ser imaginário.
Para solucionar este caso, convencionou-se que o conjunto dos Reais junto com o conjunto dos Imaginários, é chamado de Conjunto dos números COMPLEXOS, que é representado por C.
Note que o conjunto dos números complexos é o conjunto de **TODOS** os números que conhecemos até hoje! Preste bem atenção, eu disse **TODOS** os números conhecidos até hoje! Veja o gráfico a seguir:

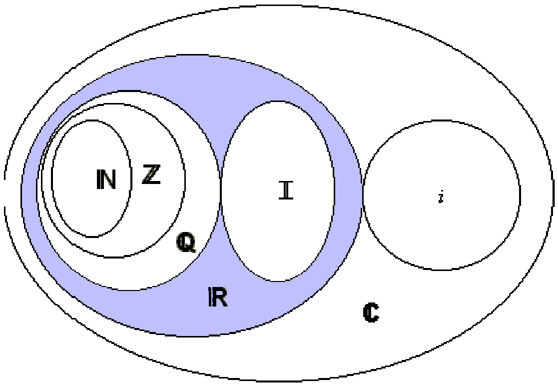


Figura 9 - Conjunto dos complexos.

1.7 Exercícios

1. Diga a qual conjunto pertence os números:

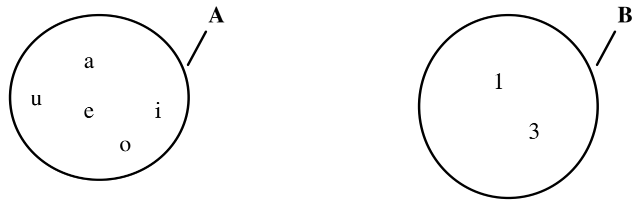
a) $35{,}5$	Este número pode ser representado por 355/10 então é RACIONAL e consequentemente REAL e COMPLEXO
b) 725	Este número é inteiro e positivo, então NATURAL e consequentemente INTEIRO, RACIONAL, REAL e COMPLEXO.
c) $\sqrt{316}$	Esta raiz não é exata, então, IRRACIONAL e consequentemente REAL e COMPLEXO
d) $\sqrt{144}$	Esta raiz é exata, e isto é igual a 12, então, NATURAL e consequentemente INTEIRO, RACIONAL, REAL e COMPLEXO
e) $\sqrt{-81}$	Raiz de número negativo, que é igual a 9i, então, IMAGINÁRIO e consequentemente COMPLEXO.
f) $-32i$	Número multiplicado por unidade imaginária, IMAGINÁRIO e consequentemente COMPLEXO.
g) $34i+2$	Número real somado com um imaginário, COMPLEXO.

2. (FUVEST) P é uma propriedade relativa aos números naturais. Sabe-se que:
I) P é verdadeira para o natural n = 10;
II) se P é verdadeira para n, então P é verdadeira para 2n;
III) se P é verdadeira para n, n > 2, então P é verdadeira para n - 2.
Pode-se concluir que:
(A) P é verdadeira para todo número natural n.
(B) P é verdadeira somente para números naturais n, n ≥ 10.
(C) P é verdadeira para todos os números naturais pares.
(D) P é somente verdadeira para potências de 2.
(E) P não é verdadeira para os números ímpares.

1.8 Os Conjuntos Vazio e Universo

Exemplo: O conjunto vazio pode ser definido por intermédio de qualquer propriedade contraditória, como por exemplo:
$\varnothing = \{ x \in \mathbb{N} \mid 5 < x < 6 \}$. E também, $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$.
$\{ x \in \mathbb{N} / x < 1 \text{ e } x > 2 \} = \varnothing = \{ \}$
$\{ x \,/\, x \cdot 0 = 2 \} = \varnothing$ (não existe x que multiplicado por 0, resulte 2.)

Muitas vezes, para facilitar o raciocínio, recorremos ao Diagrama de Venn, conforme mostra a figura 10, para representarmos um determinado conjunto. Por exemplo:



(a) Conjunto A das vogais

(b) Conjunto B dos algarismos ímpares do numeral 123

Figura 10 – Diagrama de Venn.

Quando utilizamos a linguagem de conjuntos em determinado assunto, é importante determinar o conjunto formado pela totalidade dos elementos que estão sendo considerados; esse conjunto é chamado *Conjunto Universo* para o assunto em questão. Para representá-lo, usaremos o símbolo *U*.

Um *Conjunto Finito* é aquele em que podemos determinar a quantidade de elementos. Do contrário, o conjunto é dito *Infinito*. Por exemplo,

Conjuntos Finitos:
dígitos decimais = { 0, 1, 2, ..., 9}
dígitos binários = { 0, 1}
Conjuntos Infinitos:
números naturais = { 0, 1, 2, ...}
números naturais pares = { 0, 2, 4, 6, ...}

O número de elementos em um conjunto finito é chamado de *Cardinalidade* ou de *Número Cardinal do Conjunto*. Por exemplo, se $A = \{ 1, 2, 2, 5\}$ tem-se card(A) = 3.

Um conjunto A é dito *enumerável (ou contável)* se existe uma correspondência um para um entre todos os elementos de A e os número inteiros. Por exemplo:

- conjuntos finitos, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{R}$ - exemplo de conjunto não-enumerável. Basta mostrar que um subconjunto de $\mathbb{R}$ não é enumerável. (Por exemplo, o intervalo [0, 1].)

1.9 Subconjuntos

Dados os conjuntos *A* e *B*, dizemos *A* é *subconjunto* de *B* quando todo elemento de *A* é também elemento de *B*. Para indicar este fato, usa-se a notação: $A \subset B$.

Quando $A \subset B$, diz-se também que *A* é *parte* de *B*, que está *incluído* em *B*, ou *contido* em *B*. A relação $A \subset B$ chama-se *Relação de Inclusão*.

Os símbolos de inclusão $\subset$, $\not\subset$, $\supset$, $\supset$, são usados para estabelecer relações apenas entre dois conjuntos.

Obs.: $A \subset A$, qualquer que seja A.
$\varnothing \subset A$, qualquer que seja A.
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (os conjuntos numéricos cumprem as relações de inclusão)

Quando se escreve $A \subset B$ não está incluída a possibilidade de A = B. No caso em que $A \subset B$ *e* $A \neq B$, diz-se que *A* é um *subconjunto próprio* de *B*, ou que *A* é uma *parte própria* de *B*, ou ainda, que *A está contido propriamente* em *B*.

Dizemos que $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ e $B \subset A$. Dois conjuntos A e B são iguais se, e somente se, todo elemento de A é também elemento de B e vice-versa. Por exemplo:

- {1, 1, 3, 4 } = { 1, 3, 4 }
- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\} = \mathbb{Z}^*_+$
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\} = \mathbb{Z}_+$

Obs.: 1) De um modo geral, para qualquer conjunto A, o conjunto vazio e o próprio conjunto A são seus subconjuntos.
2) Na relação entre P(A) e seus elementos, utilizamos os símbolos de pertinência ($\in$, $\notin$). Assim se {a} é elemento de P(A), podemos escrever $\{a\} \in P(A)$.
3) Se o conjunto A tem **n** elementos, então P(A) tem $\mathbf{2^n}$ elementos.

Exemplo: Os conjuntos numéricos cumprem as relações de inclusão, ou seja, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Temos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, o que traduz a afirmação: todo número natural é um número inteiro. Todo número inteiro é um número racional e existem números racionais que não são inteiros; isto é, $\mathbb{Z}$ é parte própria de $\mathbb{Q}$.

O conjunto vazio $\varnothing$ é subconjunto de qualquer conjunto *A* . Para demonstrar, suponha que o conjunto vazio não esteja contido em *A*, isto é, $\varnothing \not\subset A$. Logo, existe um elemento *a* tal que $a \in \varnothing$ e $a \notin A$. Como não existe $a \in \varnothing$, somos obrigados a admitir que $\varnothing \subset A$, seja qual for o conjunto *A*.

Uma vez introduzido o sinal de inclusão, a noção de igualdade entre conjuntos pode ser posta sob a forma:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ e } B \subset A.$$

A igualdade de conjuntos é:

Reflexiva: $A = A$, seja qual for o conjunto A;
Simétrica: se $A = B$, então $B = A$.
Transitiva: se $A = B$ e $B = C$, então $A = C$.

A relação de inclusão $A \subset B$ é:

Reflexiva: $A \subset A$, seja qual for o conjunto A;
Anti-simétrica: se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.
Transitiva: se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

A verificação dessas propriedades é imediata e, será feita mais adiante.

1.10 Conjunto das Partes de um Conjunto

A família de todos os subconjuntos do conjunto *A* é denominada *Conjunto das partes de A*, simbolizada por *P(A)* ou 2^A. De modo geral, para qualquer conjunto *A*, o conjunto vazio e o próprio conjunto *A* são seus subconjuntos.

Na relação entre *P(A)* e seus elementos, utilizamos os símbolos de pertinência ($\in$, $\notin$). Assim se {*a*} é elemento de *P(A)*, podemos escrever $\{a\} \in P(A)$. $\{\{a\}\}$ é subconjunto de *P(A)*, ou seja, $\{\{a\}\} \subset P(A)$.

Se o conjunto *A* tem **n** elementos, então *P(A)* tem $\mathbf{2^n}$ elementos.

Exemplo: Seja $X = \{ 1, 2, 3\}$. Então, $P(X) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$ com 8 elementos.

2 Operações entre Conjuntos

2.1 União

A união (ou reunião) dos conjuntos *A* e *B* é o conjunto $A \cup B$, formado por todos os elementos de *A* mais os elementos de *B*. Assim, afirmar que $x \in A \cup B$ significa dizer que pelo menos uma das afirmações seguintes é verdadeira: $x \in A$ ou $x \in B$. Podemos escrever

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Exemplo: Tomemos o conjunto universo U = N e sejam $A = \{ x \in N \mid 2 < x < 8\}$ e $B = \{ x \in N \mid x > 4\}$. Então $A \cup B = \{ 3, 4, 5, 6, ... \}$.

2.2 Interseção

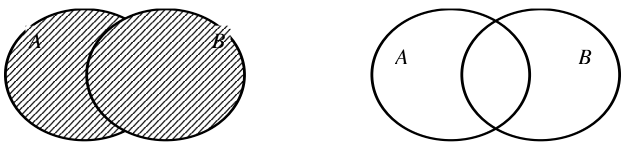
A interseção dos conjuntos *A* e *B* é o conjunto $A \cap B$, formado por todos os elementos comuns a *A* e *B*. Assim, afirmar que $x \in A \cap B$ significa dizer que se tem, ao mesmo tempo, $x \in A$ e $x \in B$. Escrevemos então

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Exemplo: Considere o exemplo anterior onde $A = \{ x \in N \mid 2 < x < 8\}$ e $B = \{ x \in N \mid x > 4\}$. Então $A \cap B = \{ 3, 4 \}$.

Pode ocorrer que não exista elemento algum *x* tal que $x \in A$ e $x \in B$. Neste caso, tem-se $A \cap B = \emptyset$ e os conjuntos *A* e *B* dizem-se *disjuntos*.

Dados dois conjuntos A e B, representamos graficamente a união dos conjuntos pela parte hachurada - figura 2(a). Hachure na figura 2(b) a interseção entre eles.



(a) União de A e B **(b)** Interseção de A e B

Figura 11 – Diagrama de Venn.

Quaisquer que sejam os conjuntos *A* e *B* tem-se $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$.

Exemplo: Sejam os conjuntos $A = \{ x \in N \mid x$ é múltiplo de 2 $\}$ e $B = \{ x \in N \mid x$ é múltiplo de 3 $\}$. Como um número natural é múltiplo simultaneamente de 2 e de 3 se e somente se este número é múltiplo de 6, temos: $A \cap B = \{ x \in N \mid x$ é múltiplo de 6 $\}$.

2.3 Diferença

A diferença entre os conjuntos *A* e *B* é o conjunto $A - B$, formado por todos os elementos de *A* que não pertencem a *B*. Escrevemos então

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Graficamente, temos a figura 12, onde os conjuntos A e B são representados por discos. A diferença $A - B$ é a parte indicada.

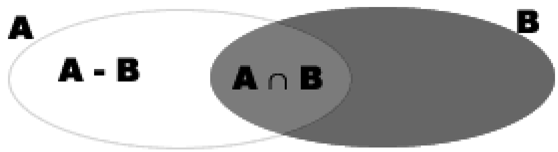


Figura 12 - Diagrama de Venn

2.4 Complementar

Dados os conjuntos A e B, onde $B \subset A$, chamamos de complementar de B em relação a A e se representa por $\complement_A B$ o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B.

$$\text{Se } B \subset A, \text{ então } \complement_A B = A - B.$$

2.5 Produto Cartesiano de Conjuntos

Outra operação útil entre conjuntos é o produto cartesiano que se baseia no conceito de par ordenado. Ao escrevermos um par ordenado *(x, y)*, a ordem dos elementos é fundamental: x é o primeiro elemento do par e y é o segundo elemento do par.

O produto cartesiano dos conjuntos A e B é o conjunto A x B cujos elementos são todos os pares ordenados *(x, y)* tal que x é elemento de A e y é elemento de B. Portanto:

$$A \times B = \{ (x,y) \mid x \in A \text{ e } y \in B \}.$$

Obs.: 1) Dados dois pares ordenados (x, y) e (a, b), dizemos que:
$(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow x = a$ e $y = b$

2) Se o conjunto A tem **m** elementos e B **n** elementos, então A x B terá **m.n** elementos.

2.6 Propriedades Formais

Veremos, a seguir, algumas propriedades das operações entre subconjuntos de um dado conjunto fundamental E. As propriedades devem ser demonstradas.

2.6.1 Propriedades das Operações de União e Interseção

Quaisquer que sejam os conjuntos A, B, C, partes de um conjunto fundamental E, tem-se:

União	Interseção
1) $A \cup \varnothing = A$	1) $A \cap \varnothing = \varnothing$
2) $A \cup E = E$	2) $A \cap E = A$
3) $A \cup \complement A = A$	3) $A \cap \complement A = A$
4) $A \cup A = A$	4) $A \cap A = A$
5) $A \cup B = B \cup A$	5) $A \cap B = B \cap A$
6) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	6) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
7) $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$	7) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	8) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2.6.2 Propriedades da Operação de tomar Complementares

Os conjuntos A e B são partes de um conjunto fundamental E, em relação ao qual estamos tomando os complementares.

1) $\complement(\complement A) = A$
2) $A \subset B \Leftrightarrow \complement B \subset \complement A$
3) $A = \varnothing \Leftrightarrow \complement A = E$
4) $\complement (A \cup B) = \complement A \cap \complement B$
5) $\complement (A \cap B) = \complement A \cup \complement B$

As propriedades 4 e 5, da tabela anterior, denominadas Leis de Morgan mostram que:

- o complementar da união é igual à interseção dos complementares; e que
- o complementar da interseção é igual à reunião dos complementares.

2.6.3 Propriedades da Operação de Diferença

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer num universo E.

1) $A - \varnothing = A$ e $\varnothing - A = \varnothing$
2) $A - E = \varnothing$ e $E - A = \complement A$
3) $A - A = \varnothing$
4) $A - \complement A = A$
5) $\complement (A - B) = \complement A \cup B$
6) $A - B = \complement B - \complement A$
7) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$
8) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

2.7 Exercícios

1. Se $A = \{ a, b \}$, classifique em verdadeiro ou falso:

a) $\{ b \} \in A$
b) $\varnothing \in A$
c) $\{ a \} \subset A$
d) $a \subset A$

2. Diga quais das seguintes proposições são verdadeiras:

a) $\{ \{1,2\},\{3,4\}\} = \{1,2,3,4\}$
b) $\{1,2\} \subset \{\{1,2\}\}$
c) $\{1,2\} \in \{\{1,2\}\}$
d) $\{a\} \in \{b,\{a\}\}$
e) $\{a\} \subset \{b,\{a\}\}$
f) $\varnothing = \{\varnothing\}$
g) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$
h) $\varnothing \in \{\varnothing\}$
i) $\{1,2,2,3,3\} = \{1,2,3\}$
j) $\{1,2,3\} \subset \{1,2,2,3,3\}$
k) $\varnothing \subset \varnothing$
l) $\varnothing \in \varnothing$

3. - Sejam U = {2, 1, 2} , G={1, 2, {1}, {2}, {1,2}}.

a) $U \in G$? Justifique.
b) $U \subset G$? Justifique.

4. Estabeleça entre cada um dos conjuntos ou elementos U = {1,2,3,4}, V = {1,4,5}, W = 2, X = {3, ∅}, Y = ∅, Z = { {1}, 2, {3}, 4}, relações de "∈ " e/ou "⊂ ", sempre que possível. Justifique.

5. Considere os conjuntos A={alunos de ED}, T={turmas existentes na Unitri}. Sendo n o número total de turmas, seja $I=\{i \in IN: i \leq n \}$. Designamos cada turma por P_i , $i \in I$. Diga quais das seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, para $i \in I$:

a) $P_i \in T$
b) $P_i \subseteq T$
c) $P_i \in A$
d) $P_i \subseteq A$
e) $P_i \in A \cup T$
f) $P_i \subseteq A \cup T$

6. Defina o conjunto IR –A, onde A é definido do seguinte modo:

a) $A = \{ x \in \mathbb{R}: | x + 5 | \geq 4 \ \wedge x \leq 0 \}$

b) $A = \{ x \in \mathbb{R}: 6x + 9 < 0 \vee \ 2x \geq 4 \}$

c) $A = \{ x \in \mathbb{R}: 6x + 9 < 0 \} \cup \{ x \in \mathbb{R} : 6x + 9 \geq 0 \}$

d) $A = \{ x \in \mathbb{R}: | x - 7 | = 4 \} \cap \{ x \in \mathbb{R} : 7x - 5 \geq 4 \}$

7. Dado o conjunto A = { 5, -2.3, 0.131131113..., 0.333..., 2/5, 3.141592... }, escreva o subconjunto de A cujos elementos sejam números racionais.

8. Qual é o conjunto união do conjunto dos inteiros positivos divisíveis por 2 e do conjunto dos inteiros positivos divisíveis por 3? Qual é o conjunto interseção?

9. Dado o conjunto $U = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$

a) o subconjunto *A* dos números menores que 5.

b) o subconjunto *B* dos números maiores que 3 e menores que 6.

c) o subconjunto *C* dos números pares maiores que 6.

d) o subconjunto *D* dos números ímpares maiores que 7.

10. Dê um exemplo para ilustrar $A \cup B = A \cup C$ com $B \neq C$.

11. Mostre que para todo conjunto X, $\varnothing \subset X$.

12. Considere a seguinte coleção de conjuntos: $T_i = \{n \in \mathbb{N} : n \leq i\}$, para $i \in \mathbb{N}$.

a) Mostre que $T_i \subseteq T_j \Leftrightarrow i \leq j, \forall i,j \in \mathbb{N}$.

b) Determine $\bigcup_{i=1}^{10} T_i$ e $\bigcap_{i=1}^{10} T_i$.

c) Determine $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i$ e $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} T_i$.

13. De trinta e cinco candidatos a uma vaga de programador, vinte e cinco sabem FORTRAN, vinte e oito sabem Pascal e dois não sabem nenhuma delas. Quantos sabem as duas linguagens?

14. Um total de sessenta clientes potenciais foi a uma loja de equipamento informático. Deles cinqüenta e dois fizeram compras: - vinte compraram papel; - trinta e seis compraram diskettes; - quinze compraram tinteiros de impressora; - seis compraram simultaneamente papel e diskettes; - nove compraram simultaneamente diskettes e tinteiros; - cinco compraram simultaneamente papel e tinteiros. Quantos compraram os três artigos?

15. Um vendedor de praia tem cinco qualidades diferentes de sanduíches (fiambre, queijo, presunto, carne assada e mistas) e três qualidades diferentes de bebidas (sumo de laranja, cerveja e café). Quantos menus diferentes pode ele oferecer, compostos de uma bebida e de um sanduíche?

16. É possível ir de Braga ao Porto de comboio ou de autocarro. Do Porto para Lisboa pode-se ir de comboio, autocarro ou avião e de Lisboa para o Funchal pode-se ir de avião ou barco. Quantos itinerários distintos se podem escolher para ir de Braga ao Funchal passando por Lisboa?

17. Num baile havia quarenta e cinco raparigas. Destas, vinte dançaram rock, dezoito dançaram lambada, quinze dançaram twist, nove dançaram rock e twist, sete dançaram rock e lambada, seis dançaram twist e lambada e três dançaram as três danças. Quantas não dançaram?

18. Sejam A, B e C conjuntos. Prove as propriedades a seguir:

a) $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$.

b) $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$

c) $A \cap B = B \cap A$

d) $A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

e) $\complement(\complement A) = A$

f) $A \subset B \Leftrightarrow \complement B \subset \complement A$

g) $A \cap \complement A = \varnothing$

h) $A \cup \complement A = \mathbf{U}$

i) $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$

j) $\complement B \subset \complement A \Rightarrow \complement(\complement A) \subset \complement(\complement B)$

k) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

19. Prove que $A = B$ se, e somente se, $(A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap B) = \varnothing$.

20. Prove as seguintes afirmações:

a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

b) $B \subset A \Leftrightarrow A \cup B = A$

c) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

e) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

f) $\complement B \subset \complement A \Rightarrow \complement(\complement A) \subset \complement(\complement B)$

g) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subset \complement B$

h) $A \cup B = U \Leftrightarrow \complement A \subset B$

i) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap \complement B = \varnothing$

21. Define-se diferença simétrica entre os conjuntos A e B por: $A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$. Mostre que:

a) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

b) Se $A \Delta B = \varnothing$ então $A = B$

c) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

d) $A \Delta B = B \Delta A$

e) $A \Delta A = \varnothing$

22. Determine $P(\{a\})$, $P(\varnothing)$, $P(\{\varnothing\})$ e $P(P(\varnothing))$. ($P(X)$ representa partes do conjunto X).

23. Prove que, para quaisquer conjuntos A e B, se tem:

a) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$.

b) $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$.

c) $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$. Em que condições se têm a igualdade?

24. Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in R_2[x]: a_0 + a_2 = 0\} \text{ e } B = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in R_2[x]: a_0 + a_1 = 0\}$$

a) verifique se $p(x)=1+2x-x^2 \in A \cap B$.

b) verifique se $h(x)=1-x-x^2 \in A \cap B$.

c) determine $A \cap B$.

25. Mostrar que:

a) Se A e B são conjuntos finitos então $A \cup B$ é finito.

b) Se A e B são conjuntos finitos então $A \times B$ é finito.

c) Se A e B são conjuntos finitos então {f | f é aplicação de A em B} é finito.

26. Mostrar que:

a) Se A é um conjunto enumerável então $\{B \subseteq A \mid B \text{ é finito}\}$ é enumerável.

b) Se A é um conjunto enumerável então $P(A)$ não é enumerável.

c) Se A é um conjunto enumerável então $\{B \subseteq A \mid B \text{ é infinito}\}$ não é enumerável.

27. Seja A um conjunto infinito. Mostrar que A é enumerável se e só se, para cada parte infinita X de A, se tem $A \sim X$.

28. São verdadeiras ou falsas as afirmações:

a) Se A, B, C são conjuntos tais que $C \neq \emptyset$ e $A \times C = B \times C$, então A = B.

b) Se A e B são conjuntos tais que $A \cup B$ é enumerável, então A é enumerável ou B é enumerável.

c) Se A, B, C são conjuntos tais que $A \cap C = B \cap C$ e $C \neq \emptyset$, então A = B.

d) Sejam A um conjunto e $x \notin A$. Se A é infinito então $A \cup \{x\} = A$.

APÊNDICE A. Os Símbolos da Linguagem dos Conjuntos - Resumo

Nos itens anteriores, à medida que falávamos sobre conjuntos, os símbolos foram surgindo e agora já conhecemos e estamos utilizando uma boa quantidade deles. Vamos fazer um resumo de tais símbolos:

$a \in A$	lê-se:	*a* pertence a *A*
$a \notin A$	lê-se:	*a* não pertence a *A*
$A = \{x \mid x$ goza a propriedade $P\}$	lê-se:	*A* é o conjunto dos *x* tal que *x* goza a propriedade *P*
$A = B$	lê-se:	*A é igual a B*
$A \neq B$	lê-se:	*A é diferente de B*
$A \subset B$	lê-se:	*A está contido em B*
$A \not\subset B$	lê-se:	*A não está contido em B*
$A \supset B$	lê-se:	*A contém B*
$A \supset B$	lê-se:	*A não contém B*
$\emptyset$	lê-se:	conjunto *vazio*
C_B^A	lê-se:	*complementar* de *A* em relação a *B*
$A - B$	lê-se:	*A menos B*
$A \cap B$	lê-se:	*A inter B*
$A \cup B$	lê-se:	*A união B*
$\forall x$	lê-se:	*qualquer que seja* x ou *para todo* x
$\exists\, x$	lê-se:	*existe ao menos um* x ou *pelo menos um* x
$\exists\, x$	lê-se:	*não existe* x *algum*
$p \Rightarrow q$	lê-se:	*se* p *então* q ou p *implica* q
$p \Leftrightarrow q$	lê-se:	p *é equivalente a* q